La matematica tra gioco e realtà

Strategie, regole, scelte, fenomeni casuali, ... e matematica

0. Introduzione

In molti giochi e in molti sport è presente più o meno esplicitamente la matematica; la matematica interviene quasi sempre nella descrizione delle regole del gioco, nelle determinazione dei punteggi, …; spesso si ricorre a conoscenze matematiche per scegliere mosse, strategie, …

La matematica che interviene è la stessa che si impiega anche per affrontare situazioni "reali": per descrivere fenomeni, per valutare grandezze, per risolvere problemi, …. Del resto i giochi non sono tutti immaginari: molti hanno forti analogie con situazioni reali o riproducono in piccolo fenomeni reali.

Fate e *discutete esempi* di giochi con le diverse caratteristiche sopra indicate.

La matematica ha un ruolo fondamentale anche nella realizzazione dei videogiochi: la simulazione sia di giochi tradizionali (solitari con le carte, filetto, puzzle, scacchi, …) che di nuovi giochi o sport o situazioni "serie" (sci, calcio, giochi d'avventura, guida di automobile, guida di aereo, …) richiede la traduzione di figure, movimenti, comportamenti, … in termini algebrici e numerici "comprensibili" al calcolatore.

In questa scheda affronteremo questa problematica rivedendo e ampliando l'uso di strumenti matematici già incontrati e introducendo nuovi concetti matematici.

1. Giochi algebrici e geometrici

Il ***calcolo letterale***, oltre che per rappresentare mediante equazioni, sistemi, … fenomeni reali, può essere usato anche per inventare o affrontare giochi. Nel → quesito **e2** della scheda *Algebra elementare* è illustrato e spiegato il "trucco" per avere successo in un gioco del tipo "indovino il numero che hai pensato".

1 Spiega la strategia per aver successo nel gioco «pensa tre numeri naturali consecutivi, fanne il prodotto e aggiungi il numero centrale; dimmi quanto ottieni e ti so dire quali sono i tre numeri».
[*traccia:* • indica con x il numero centrale; • indica con h il risultato fornito dalla persona che ha pensato i numeri (prodotto dei tre numeri aumentato del numero centrale); • esprimi h in funzione di x tenendo conto che il primo e il terzo numero sono $x-1$ e $x+1$: h= … • risolvi questa equazione rispetto a x (e, poi, calcola $x-1$ e $x+1$)]

Vediamo, ora, un gioco in cui si indovinano due numeri.

2 Andrea dice a Marco: «scegli due numeri naturali uno divisibile esattamente per l'altro, dimmi il quoziente e la differenza tra i due numeri, ti dirò quali numeri hai pensato». Andrea trova i numeri in questo modo (dove con Q e D abbiamo indicato il quoziente e la differenza):
− divide D per $Q-1$ ottenendo il più piccolo dei due numeri pensati
− moltiplicando tale numero per Q ottiene l'altro numero pensato.
(1) Verifica con qualche prova che il *trucco* funziona.
(2) Per spiegare perché il trucco funziona, avendo indicato con A e B i due numeri e tradotto i calcoli fatti da Marco nel *sistema* seguente: $A/B = Q$ *AND* $A-B = D$

Alcuni giochi si basano non sulla risoluzione di equazioni o sistemi, ma su dimostrazioni di ***proprietà dei numeri naturali***. Consideriamo ad esempio il gioco seguente.

Gianni dice a Carla:
«*Metti* di nascosto un numero dispari di monete in una mano e un numero pari di monete nell'altra; *moltiplica* per 2 il numero di monete che hai nella mano sinistra e per 3 il numero di quelle che hai nella mano destra; *somma* tra loro i due numeri trovati. Se mi dici quanto hai ottenuto io indovino in quale mano hai il numero dispari di monete e in quale mano hai il numero pari.»

Gianni "indovina" con questo trucco:
il numero nella mano destra è della stessa "*parità*" (pari o dispari) del numero finale ottenuto da Carla.

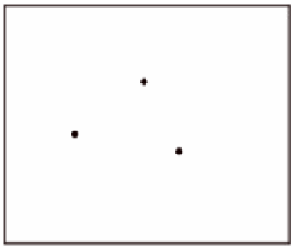
3 • *Verifica* con qualche prova che il trucco funziona.
• *Completa* in modo che siano vere le seguenti proposizioni (se possibile con "qualunque", altrimenti con "pari" o con "dispari"):

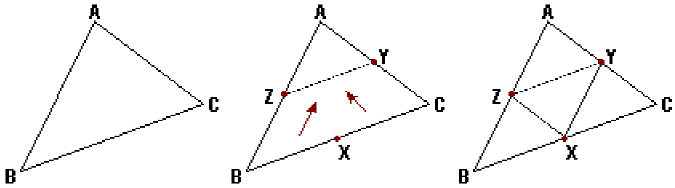
(a) se moltiplico per 2 un numero naturale ... ottengo un numero pari
(b) se moltiplico per 3 un numero naturale ... ottengo un numero pari
(c) se moltiplico per 3 un numero naturale ... ottengo un numero dispari
(d) se sommo un numero pari e un numero ... ottengo un numero dispari
(e) se sommo un numero pari e un numero ... ottengo un numero pari

Nelle rubriche di enigmistica spesso sono proposti anche *giochi di tipo* ***geometrico.*** Vediamone uno.

4 Disegna un triangolo i cui lati passino per i punti indicati a lato in modo che ogni punto sia equidistante dai vertici del lato su cui si trova.

Traccia. Per individuare un procedimento con cui costruire il triangolo conviene ragionare a "ritroso": partire da un triangolo ABC qualsiasi e tracciare tre punti X, Y e Z in modo che tra questo triangolo e i punti valgano le condizioni richieste (i lati siano tagliati a metà dai tre punti, cioè questi siano i loro punti medi); trovare una relazione che associ ai tre punti il triangolo, utilizzabile poi per costruire un analogo triangolo a partire da tre altri punti qualunque (e, quindi, anche dai punti assegnati dall'esercizio).





2. Successioni e definizioni per ricorsione

In un cosiddetto "test di intelligenza" si trova la seguente domanda:

«Questi sono i primi sei numeri di una successione di numeri generati con una certa regola. Metti al posto dei puntini i numeri mancanti»

1 2 … 8 16 …

Per gli autori del test la risposta è: 1 2 ***4*** 8 16 ***32***, cioè la "regola" sarebbe:

(1) scrivi 1 **(2)** scrivi il doppio del numero precedente **(3)** vai a **(2)**

Se indico gli elementi della successione con la variabile **indiciata** x(.), cioè indico con x(n) il numero al "posto n" della successione (numerando i posti a partire da 1), posso descrivere la successione così: x(1) = 1, x(2) = 2, x(3) = 4, ...

Con un'applicazione informatica posso procedere in vari modi. Ad esempio per ottenere i primi 10 elementi della successione

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512

in JavaScript posso usare (vedi):

```
k = 1; document.write(k); for(n=1; n<=9; n=n+1) { k = k*2; document.write(", "+k) }
```

o (vedi):

```
k = 1; x = [k]; for(n=1; n<=9; n=n+1) { k = k*2; x = [x," "+k] }; document.write(x)
```

Anche fuori da un linguaggio di programmazione, posso descrivere sinteticamente la successione così:

x(1)=1 *AND* x(n+1) = x(n)·2 (n intero positivo) $\begin{cases} x(1)=1 \\ x(n+1)=x(n)\cdot 2 \end{cases}$ x(1)=1, x(n+1)=x(n)·2

dove la seconda e la terza espressione sono "abbreviazioni convenzionali" in cui l'utente deve capire il ruolo che, in questo caso, hanno la parentesi "{" o la virgola "," e deve sottointenedere che n è una variabile che varia sugli interi positivi. Molto spesso si usa far variare gli indici della successione a partire da 0 invece che da 1, ossia sull'insieme dei numeri naturali, come abbiamo già fatto varie volte in schede precedenti operando in JavaScript (La Automazione 5).

5 Scrivi i primi 10 elementi della successione: y(1)=1, y(2)=2, y(3)=3, y(n+3)=y(n)·8 (n intero positivo)

Quest'esercizio fa capire che *non c'è un'unica regola* per generare una successione che sia un completamento di: 1 2 … 8 16 …, anzi se ne possono inventare infinite. Molto "intelligente" il test (come quasi tutti i cosiddetti "test di intelligenza") forse non è **!**

La prima successione (1, 2, 4, 8, 16, 32, …) può essere descritta più sinteticamente mediante un'unica formula: $x(n) = 2^{n-1}$ (2^0=1, 2^1=2, 2^2=4, …). Ciò non accade, invece, per la seconda successione.

Consideriamo il seguente *problema:*

«In un certo allevamento di animali il numero dei capi ogni anno aumenta mediamente di metà. Si vuole studiare l'aumento del numero di capi al passare del tempo (escludendo che si vendano o eliminino capi)».

Per *matematizzare* il problema indichiamo con:

− H il numero iniziale di capi,
− n il numero d'ordine dell'anno
− P(n) la popolazione (cioè il numero dei capi) nell'anno n-esimo.

6 Completa il sistema seguente in modo che sia un modello matematico del nostro problema.

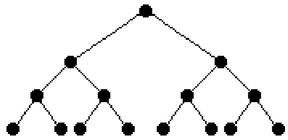
P(1) = … *AND* P(n+*1*) = P(n)·(1 + … /100)

Ovviamente questo modello matematico *non rappresenta fedelmente la realtà:* suppone che ogni anno l'aumento sia esattamente del 50% e che le condizioni dell'allevamento si mantengano inalterate senza limitazioni di tempo (non vi siano epidemie, non vi sia esaurimento delle risorse alimentari, …).

Alcuni batteri in particolari condizioni si riproducono aumentando del 100% (cioè raddoppiando) ogni T minuti (con T numero fissato). Se indichiamo con H il numero iniziale di batteri, con n il numero degli intervalli di tempo di ampiezza T trascorsi (quindi n=1 dopo T minuti, n=2 dopo T·2 minuti, …) e con P(n) il numero di batteri dopo n intervalli di tempo, possiamo descrivere lo sviluppo di questi batteri con il sistema seguente:

P(0) = … *AND* P(n+*1*) = P(n)·2.

7 Invece del sistema precedente avremmo potuto utilizzare la formula: $P(n) = H\cdot 2^n$. Calcolate P(3) sia utilizzando il sistema che utilizzando la formula e confrontate i risultati. Spiegate perché le due definizioni sono equivalenti.



8 Riferendoti all'allevamento considerato in precedenza, completa la seguente formula in modo che sia equivalente al sistema che hai completato nel quesito 6. $P(n) = H\cdot\ldots$

Le funzioni del tipo $x \to a^x$ (con $a > 0$) vengono dette ***esponenziali***. Quindi $n \to 2^n$ e $n \to 1.5^n$ sono particolari funzioni esponenziali (con dominio ristretto a **N**).

Per questo, una *popolazione* P che, all'aumentare del numero *n* di anni (o altri intervalli di tempo) trascorsi, cresca seguendo più o meno una relazione del tipo $P = k\cdot a^n$ si dice *a crescita esponenziale*. In certi periodi anche la popolazione umana (su tutta la terra o in particolari regioni) è cresciuta in modo esponenziale (ad es. a partire dal 1790 fino al 1860 la popolazione degli U.S.A. è cresciuta secondo la legge: $P = 3.9\cdot 1.35^n$ dove P indica la popolazione in milioni e *n* il tempo trascorso in decenni).

Le funzioni a input in **N** (o in $\mathbf{N}^*$, i numeri naturali escluso lo 0, o nell'insieme dei numeri naturali maggiori di un certo numero fissato), che sono rappresentabili, come abbiamo visto, mediante *variabili indiciate,* vengono chiamate anche ***successioni*** (come anche noi abbiamo già fatto più volte). Abbiamo visto che si possono definire funzioni di questo tipo oltre che mediante equazioni ($x(n) = 2^{n-1}$ per n intero positivo, $z(n) = 2n+1$ per n naturale, $P(n) = H\cdot 2^n$ per n naturale), anche mediante sistemi:

$$x(1)=1,\ x(n+1)=x(n)\cdot 2 \qquad z(0)=1,\ z(n+1)=z(n)+2 \qquad P(0)=H,\ P(n+1)=P(n)\cdot 2$$

Definizioni di quest'ultimo genere vengono chiamate *definizioni per* ***ricorsione*** o *definizioni ricorsive.*

La parola *ricorsione* deriva dal fatto che questi sistemi contengono, oltre a equazioni (come x(0)=1, y(0)=1, y(1)=2, …) che permettono di determinare uno o più valori iniziali, equazioni (come x(n+1)=x(n)·2, y(n+3)=y(n)·8, …) che possono essere *ripercorse* più volte per calcolare man mano tutti gli altri valori. A volte invece di "ricorsione" si usa "ricorrenza", che nel linguaggio comune ha un uso leggermente diverso (indica l'anniversario di un avvenimento o il ripetersi di un fenomeno nel corso del tempo).

Come abbiamo visto (successione del quesito 5) non tutte le successioni definibili per ricorsione sono definibili anche mediante una sola equazione.

3. Calcolo combinatorio

Abbiamo visto nella scheda ➜ *Modelli Matematici per l'Economia* il concetto di ***fattoriale***.

Volendo scegliere l'ordine con cui passare per 4 diverse località ho 4 possibilità per la località "1", ho poi 3 possibilità per la località "2", 2 altre possibilità per la località "3", e, infine, ho 1 sola possibilità per la "4". Le 4 località posso raggiungerle in **4·3·2·1** (=24) percorsi diversi. Questo numero viene indicato con 4!.

Analogamente posso disporre 5 commensali attorno a un tavolo in 5! = 5·4·3·2·1 (=120) modi, le classifiche possibili tra 8 concorrenti sono 8! = 8·7·6·5·4·3·2·1 (=40320), ….

La funzione che a *n*, numero naturale, associa la quantità $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ [ovvero $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$] dei *modi in cui posso ordinare un insieme di* n *oggetti* (cioè delle *sequenze ottenibili con* n *oggetti*) viene chiamata ***fattoriale***. Il fattoriale di *n* viene usualmente indicato con ***n*!**.

Quindi: 1! = 1, 2! = 2·1 = 2, 3! = 3·2·1 = 6, 4! = 4·3·2·1 = 24

Poiché nel caso di un insieme costituito da 0 oggetti, cioè nel caso dell'insieme vuoto, l'unica sequenza realizzabile è la sequenza vuota, pongo anche ***0! = 1***.

La funzione fattoriale può essere definita *ricorsivamente* così:

$$0! = 1, \quad (n+1)! = n!\cdot(n+1).$$

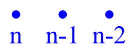
I modi in cui posso ordinare *n* oggetti, cioè le sequenze di lunghezza *n* che posso realizzare con *n* oggetti, vengono spesso chiamati anche ***permutazioni*** di *n* oggetti (il nome deriva dal fatto che nel linguaggio comune "permutare" è sinonimo di "riordinare"). Quindi le permutazioni di *n* oggetti sono ***n*!**.

Sempre nella scheda *Modelli Matematici per l'Economia* abbiamo visto come usare il tasto **[!]** presente nella grande CT.

9 Una società sportiva organizza un torneo provinciale di pallavolo; prevede 10 squadre partecipanti. Sceglie un torneo "a classifica" (ogni squadra sostiene un incontro con ciascuna delle altre squadre e sulla base degli esiti degli incontri, dei punteggi, … viene stabilita una graduatoria senza ex aequo), articolato in 9 giornate. Quante sono le possibili classifiche finali complete, dal 1° al 10° posto?

10 Nel caso del torneo del quesito precedente, quanti sono i modi in cui possono essere vinte le medaglie d'oro, d'argento e di bronzo, cioè quante sono le possibili terne (1ª classificata, 2ª classificata , 3ª classificata) a cui possono dare luogo le 10 squadre partecipanti?

Più in generale, con *n* oggetti posso costruire $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)$ sequenze di lunghezza 3: infatti ho *n* possibilità per la scelta del 1° oggetto, *n*–1 possibilità per la scelta del 2° oggetto e *n*–2 per la scelta del 3°.



Ancora più in generale, se ho *n* oggetti la quantità di sequenze di lunghezza *k* che posso costruire è:

$$\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k\ \text{fattori}}$$

Tale prodotto viene in genere indicato con $D_{n,k}$ o con ***D(n,k)***.

Viene usata la lettera "D" in quanto le sequenze di lunghezza *k* realizzabili con *n* oggetti vengono chiamate anche ***disposizioni*** di *n* oggetti *k* a *k*: ogni sequenza è interpretabile come uno dei modi in cui posso "disporre" *k* oggetti scelti tra *n*. Tenendo conto che c'è solo la sequenza vuota costituita da 0 elementi, si pone *D(n,0)* = 1 per ogni numero naturale *n*.

$\boxed{11}$ Quanto vale D(n,n)?

Possiamo fare facilmente i calcoli usando direttamente la piccola CT o utilizzando il fatto che **D(n,k) = n! / (n-k)!** e ricorrendo al tasto **[!]** della nostra grande CT.

$\boxed{12}$ Quante stringhe di lunghezza 4 formate da caratteri diversi posso realizzare con le 52 lettere {a, b,..., z, A,..., Z} di una tastiera? E quelle realizzabili usando sole le lettere maiuscole?

Con la "piccola CT" posso ottenere la seconda risposta introducendo "26*25*24*23". Con la "grande CT" posso calcolare !(26) e !(22) e fare il rapporto tra i loro due valori (4.0329146112660565e+26 / 1.1240007277776077e+21). In ogni caso ottengo 358800. Ovviamente in genere, in casi semplici, il primo metodo è più conveniente. Vedremo tra poco un altro modo di procedere.

In un torneo a 11 di un particolare sport le prime 3 squadre classificate passano l'anno dopo al torneo regionale. Le possibili terne (1^a, 2^a, 3^a) su 11 squadre sono 11·10·9, ossia D(11,3). Per calcolare quanti sono i possibili terzetti di squadre che vengono "promosse" al livello superiore non ci interessa la graduatoria tra le prime 3 squadre: al variare di questa (che può venire fuori in 3·2·1, ossia 3!, modi diversi) le squadre che passano sono le stesse.

In altre parole tra le possibili terne (1^a, 2^a, 3^a) ogni terzetto di squadre è conteggiato 3! volte. Quindi il *numero dei terzetti* è:

$$\frac{n° \textit{ totale delle terne}}{n° \textit{ terne costituibili con un terzetto}} = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 2\cdot 1} = 11\cdot 5\cdot 3 = 165$$

Più in generale il numero dei ***sottoinsiemi di* k *elementi di un insieme di* n *elementi*** è pari al numero delle sequenze di *k* elementi che posso formare diviso per il numero dei modi in cui posso ordinare queste sequenze, cioè:

$$\frac{n° \textit{ sequenze di } k \textit{ elementi}}{n° \textit{ permutazioni di una sequenza}} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{1}$$

[il rapporto tra il prodotto dei primi *k* numeri interi positivi a scalare da *n* e il prodotto di quelli a scalare da *k*]

I sottoinsiemi di *k* elementi di un insieme di *n* elementi vengono chiamati anche ***combinazioni*** *di* n *elementi* k *a* k.

Il numero di tali combinazioni viene indicato $C_{n,k}$ o ***C(n,k)*** o C_n^k o $\binom{n}{k}$

$\boxed{13}$ Una fabbrica produce 10 tipi di cioccolatini e li confeziona in scatole di 32 cioccolatini disposti su 4 file. In ciascuna fila colloca cioccolatini dello stesso tipo; in file diverse colloca cioccolatini di tipi diversi. In quanti diversi assortimenti di gusto potrebbe confezionare i cioccolatini?

Quanti sono gli insiemi di 10 carte che si possono fare con le 13 carte di picche? (cioè, a ramino, quanti sono i modi di fare colore di picche?)

È il numero degli insiemi di 10 elementi che si possono fare con 13 elementi, cioè C(13,10). Allora dovrei calcolare:

13/10·12/9·11/8·10/7·9/6·8/5·7/4·6/3·5/2·4/1;

posso fare un po' di semplificazioni: "/10" e "·10" si annullano, e così "/9" e "·9", "/8" e "·8", …, "/4" e "·4", per cui alla fine rimane:

13·12·11/3/2/1 (=13·2·11 = 286), che equivale a C(13,3).

La cosa non deve stupire: scegliere 10 carte tra 13 equivale a sceglierne 3 da scartare: C(13,10)=C(13,3). Con lo stesso ragionamento si ha che, in generale, ***C(n,k)*** = ***C(n,n-k)***. Se *k* à maggiore di *n*/2 conviene fare questa trasformazione.

Nella **grande CT** è presente il tasto **[C(n,k)]** che consente di fare tutti i calcoli molto facilmente.

Usando questo tasto è possibile calcolare anche **D(n,k)**, tenendo conto che il suo valore è uguale a **C(n,k)·k!**. Nel caso di D(26,4), invece che calcolare 26·25·24·23 posso calcolare C(26,4)·4!:

C(26,4) = 14950   !(4) = 24   14950 * 24 = 358800

Ricordiamo che con la CT e con vari programmi si possono calcolare **n!** e **C(n,k)** solo entro certi limiti. Ad esempio con i nostri script si possono calcolare al massimo 170! e C(1029,514): per 171! e C(1030,515) si ottengono dei messaggi di errore.

Ho 6 oggetti, chiamiamoli A, B, C, D, E e F. Voglio fare una confezione contenente alcuni di questi oggetti. In quanti modi posso farla? Potrei fare una confezione vuota. Potrei fare una confezione contenente solamente A o solamente B o …. Oppure una confezione contenente A e B o A e C o …. O potrei fare una confezione che li contiene tutti. Quante sono le possibili confezioni? Una strategia per trovare quante sono è la seguente:

per ognuno dei 6 elementi ho 2 possibilità: lo metto nella confezione o non ce lo metto:

• • • • • •
2 2 2 2 2 2   quindi in tutto ho 2^6 possibilità.

Più in generale i possibili ***sottoinsiemi di un insieme di* n *elementi*** sono 2^n.

Quante sequenze costituite da 3 cifre decimali posso scrivere? Ho 10 possibiltà per la prima cifra, poi 10 per la seconda e, infine, 10 per la terza. Le possibilità sono dunque $10\cdot 10\cdot 10 = 10^3 = 1000$; del resto i numeri, da 000 a 999, sono 1000. Quante sono le possibili coppie di uscite che si possono ottenere lanciando due dadi? 6 possibilità per il primo dado, 6 per il secondo; in tutto $6\cdot 6 = 6^2$. Quante sequenze di carte da un mazzo da 40 posso ottenere con 3 alzate? $40\cdot 40\cdot 40 = 40^3$. Più in generale:

• • • … •
n n n … n   le possibili ***sequenze di* k *simboli*** tratti da un ***alfabeto di* n *elementi*** sono $n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n = \mathbf{n^k}$.

Queste sequenze vengono spesso chiamate anche ***disposizioni con ripetizione*** di *n* elementi *k* a *k*, in quanto, rispetto alle *disposizioni*, ammettono la possibilità di utilizzare lo stesso elemento più volte nella stessa sequenza (in "999" il "9" compare tre volte).

$\boxed{14}$ Quanti sono e quali sono i sottoinsiemi di {1, 2, 3, 4}?

La branca della matematica che si occupa dei modi in cui si possono formare nuovi oggetti (sequenze, insiemi, …) "combinando" gli elementi di un insieme finito viene chiamata ***matematica combinatoria*** (o *calcolo combinatorio*).

Osserviamo che i numeri C(n,0), C(n,1), … C(n,n) vengono chiamati anche ***coefficienti binomiali***. Vediamo perché.
Proviamo a calcolare $\mathbf{(a+b)^5}$. Se sviluppiamo i calcoli e riordiniamo il risultato otteniamo:

`a^5 + 5*a^4 b + 10*a^3*b^2 + 10*a^2*b^3 + 5*a*b^4 + b^5`

Potremmo fare i calcoli facilmente col software online **WolframAlpha** battendo `expand (a+b)^5`. Analogamente calcolo $\mathbf{(a+b)^6}$:

`a^6 + 6*a^5*b + 15*a^4*b^2 + 20*a^3*b^3 + 15*a^2*b^4 + 6*a*b^5 + b^6`

E questi valori (come posso controllare con la grande CT) non sono altro che C(5,0), C(5,1), C(5,2), …, C(5,5) e C(6,0), C(6,1), C(6,2), …, C(6,6).

C(n,k) ha il valore del coefficiente del termine $\mathbf{a^k\,b^{n-k}}$ dell'elevamento alla **n** del binomio **a+b**.

4. Dalla statistica alla probabilità

Nei giochi e nella realtà spesso si hanno da fare scelte di cui non si sanno prevedere esattamente le conseguenze (quale carta conviene scartare? in quale orario conviene partire per incontrare meno traffico in autostrada? …) o, comunque, si hanno da affrontare fenomeni di cui non si sa prevedere esattamente lo sviluppo (l'uscita di un dado, l'evolvere del tempo atmosferico, …). Abbiamo già incontrato alcune situazioni di questo genere nella ➨ scheda 3 de *Le statistiche* e nella scheda ➨ *Modelli matematici per l'economia.* In una prossima scheda affronteremo lo studio degli strumenti matematici che permettono di *razionalizzare* le interpretazioni dei (e le scelte di fronte ai) fenomeni *casuali,* cioè di affrontarle ricorrendo alla *ragione* invece che affidandosi a pregiudizi, a superstizioni o al fato, come spesso accade.

Consideriamo la situazione:

(A) Sto giocando a *sette e mezzo* e sono il primo di mano. Ho **1**♦ e 3♣. Mi conviene chiedere carta?

Sette e mezzo è giocato con un mazzo da 40, le figure valgono mezzo punto, le altre carte hanno il valore usuale; alla regina di cuori **Q**♥ (matta) il giocatore può assegnare, a piacere, un qualunque punteggio: 1, 2, …, 7 o mezzo punto. Ogni giocatore può chiedere una o più carte. Vince chi ottiene il punteggio più vicino (ma non superiore) a 7 e mezzo.

15 Secondo voi, se chiedo carta è più probabile che sballi oppure che non sballi?

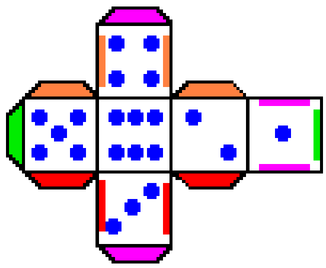
Consideriamo ora una situazione diversa.

(B) Un amico mi dà un dado. Lo lancio. Esce 6. Posso ritenere che, se lo rilancio, l'uscita più probabile sia un altro 6?

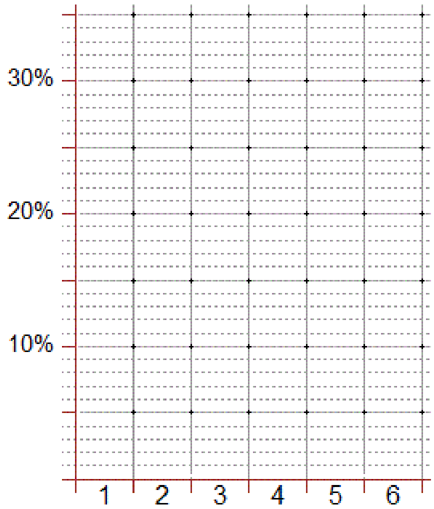
16 *Discutete* questo problema.

Per verificare le opinioni emerse nel corso della discussione facciamo un esperimento.

17 *Ritaglia* lo sviluppo del dado a cui puoi accedere cliccando **qui**, e che vedi riprodotto in piccolo a lato. Poi incolla le linguette e costruisci il dado. Infine (per impedirne l'apertura durante i lanci) applica delle striscette di scotch sugli spigoli indicati, corrispondenti alle linguette. Effettua almeno una trentina di lanci (tira il dado con una certa forza, in modo che rotoli più volte) registrando le uscite in una tabella.
Raccogliete i dati registrati da tutti gli alunni in un'unica tabella, *calcolatene* la distribuzione percentuale e riportate i valori nella tabella seguente. Costruite, quindi, il relativo istogramma e discutete quanto ottenuto.

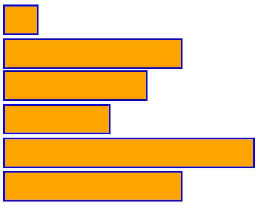


	U = 1	U = 2	U = 3	U = 4	U = 5	U = 6
freq. assoluta						
freq. relativa	%	%	%	%	%	%



Abbiamo indicato con U l'uscita del dado; quindi sotto a "U=1" scrivete la frequenza con cui si verifica l'eventualità che l'uscita sia 1, sotto a "U=2" scrivete …

	Freq.	%
1	2	4%
2	10	20%
3	8	16%
4	6	12%
5	14	28%
6	10	20%
	50	100%



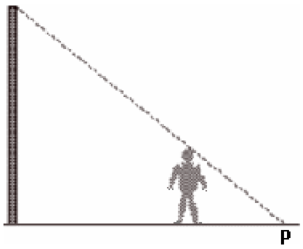
18 Lo script **Dado** simula il funzionamento di un dado simile a quello considerato nel quesito precedente, realizzato con un particolare cartoncino. A fianco l'esito corrispondente a 50 lanci. Provalo con un numero più grande di lanci e confrontalo con l'istogramma da te ottenuto.

5. Esercizi

e1 Tre fratellini dormono nella loro stanza. Durante la notte uno di loro si sveglia, si alza e sul tavolo della cucina trova un vassoio di cioccolatini, ne mangia un terzo e torna a dormire. Poco dopo si sveglia un altro fratello che, andato in cucina e visti i cioccolatini rimasti, ne mangia un terzo e ritorna a letto. Anche il terzo fratello si sveglia e si comporta come gli altri due: mangia un terzo dei cioccolatini che ha trovato in cucina. Al mattino nel vassoio vi sono 8 cioccolatini. Quanti ve n'erano la sera prima?
Prova a risolvere l'indovinello e, poi, confronta la strategia che hai impiegato con quelle usate dai tuoi compagni.

e2 In vari libri medioevali si trovano "problemi del travaso" simili al seguente: «Un oste dispone solo di due mestoli "misuratori", uno da 1/4 di litro, l'altro da 1/5 di litro. Può, mediante uno o più travasi eseguiti mediante i mestoli, trasferire 3/10 di litro dalla botte in un altro recipiente?»
Ai nostri giorni affrontiamo il problema così:
− indichiamo con M e N la quantità di travasi eseguiti, rispettivamente, con il 1° e con il 2° mestolo, conteggiando positivamente i travasi dalla botte al recipiente e negativamente quelli in senso opposto (ad esempio M=3 e N=−2 corrisponde a versare 3 mestoli da 1/4 nel recipiente e toglierví 2 mestoli da 1/5);
− il quesito si traduce nella questione se l'equazione 1/4·M+1/5·N=3/10 ha soluzioni, cioè se esistono coppie (M,N) di numeri interi che rendono vera l'equazione.
Il problema ha soluzioni? [per rispondere trasforma l'equazione in un'altra più "comoda" da esaminare] In caso negativo motiva la risposta, in caso affermativo esplicita una soluzione e stabilisci se ce ne sono altre.

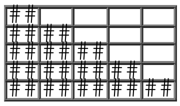
e3 Alberto vuole misurare l'altezza di un palo. Si pone davanti ad esso in modo che la sua ombra e quella del palo finiscano nello stesso punto P del terreno. Alberto misura la lunghezza della propria ombra (circa 2 m), poi quella del palo (circa 8 m) e conclude che il palo è alto circa 7 m.
• Qual è la strategia impiegata da Alberto?
• Quale altro dato ha utilizzato per ottenere la altezza del palo?
• Qual è il valore di questo dato?
• Questo metodo vale sia nel caso che la luce provenga dal sole che in quello in cui sia prodotta da un lampione?



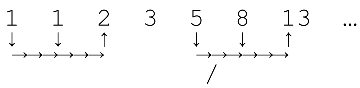
e4 Luigi per conoscere l'altezza di un muro procede così:
− pone uno specchio per terra tra sé e il muro e arretra fino a che vede riflessa nello specchio la sommità del muro;
− sa che i propri occhi sono all'altezza di circa 170 cm da terra, che lo specchio è a circa 120 cm dal muro e che lui dista dallo specchio circa 70 cm;
− utilizzando queste informazioni riesce a stimare l'altezza del muro.
Come ha fatto? Quanto è alto il muro?

e5 Considera le successioni così definite:
$x(1) = A,\ x(n+1) = \sqrt{x(n)}$ $\qquad$ $y(1) = 1,\ y(n+1) = \big(y(n) + K/y(n)\big) / 2$
Usando gli script **boh1** e **boh** calcola un po' di elementi delle successioni che si ottengono assegnando ad A e a K diversi valori. Che cosa puoi congetturare dalle uscite che ottieni?

e6 Per realizzare con il Lego una scaletta alta 5 mattoncini nel modo raffigurato a lato devo impiegare 5+4+3+2+1= 15 mattoncini. Indichiamo con M(*n*) il numero dei mattoncini necessari per realizzare una scaletta alta *n* (quindi M(5) = 15). Calcola M(*n*) per diversi valori di *n*. Poi prova a definire M(*n*) ricorsivamente e, se ci riesci, mediante un'unica formula M(*n*)=… (per quest'ultima richiesta puoi aiutarti mettendo in relazione la quantità dei mattoncini della scaletta con la quantità dei rettangolini tratteggiati nel disegno).



e7 La successione consì definita:
Q(1)=1, Q(2)=1, Q(N+2)=Q(N)+Q(N+1)
illustrata a fianco nota come *successione di* ***Fibonacci*** è stata presentata nel "Liber abaci" da Leonardo Pisano (vissuto a cavallo del 1200 e noto come Fibonacci) come modello matematico del seguente "problema dei conigli":



alle 8 coppie presenti nel mese precedente si aggiungono le 5 coppie figliate dalle 5 coppie esistenti due mesi prima

«quante coppie di conigli verranno prodotte in N mesi a partire da un'unica coppia se ogni mese ogni coppia dà alla luce una nuova coppia che diventa produttiva a partire dal secondo mese di vita?».
Q(N) rappresenta la quantità di coppie presenti dopo N mesi. *Completa* l'elenco dei termini della successione fino a Q(11). Scrivi un programma (JS o R …) che dando N in input fornisca come output Q(N).

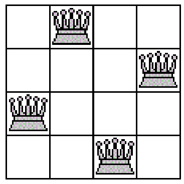
e8 3 ragazze e 2 ragazzi si siedono al cinema in 5 posti consecutivi della stessa fila. In quanti modi possono occupare i posti, tenendo conto che ogni femmina vuole avere a fianco almeno un maschio (e viceversa)?

e9 Disponendo di stoffe di 8 colori differenti quante bandiere tricolori a bande verticali (di dimensioni uguali e colori tutti e tre diversi) puoi realizzare?

e10 Un ristorante propone un menu turistico a prezzo fisso composto da un primo, a scelta tra 3, un secondo, a scelta tra 4, una "varia" (bevande o dolce), a scelta tra 5. Tra quanti pasti diversi si può scegliere?
A un prezzo di poco superiore è prevista la possibilità di prendere, a piacere, un'ulteriore varia. Tra quanti pasti si può scegliere con questo prezzo?

e11 Una società sportiva vuole organizzare un torneo provinciale di pallavolo rivolto alle squadre delle scuole superiori. Deve decidere se scegliere un torneo a "eliminazione diretta" o un torneo "a classifica". Per fare ciò vuole sapere come il numero *S* delle squadre che possono essere ammesse dipende dal numero *n* delle "giornate" di durata del torneo (in una giornata vengono disputati contemporaneamente più incontri, ma ogni squadra disputa al più una partita). *Stabilite* come *S* varia in funzione di *n* nei due tipi di torneo.
Tracciate i grafici delle due funzioni individuate per *n* che varia tra 0 e 6.

e12 Un antico quesito sul gioco degli scacchi chiede in quanti modi si possono disporre 8 regine su una scacchiera 8×8 in modo che nessuna di esse risulti "attaccata" da un'altra (nessuna regina deve trovarsi sulla stessa riga o colonna o diagonale di un'altra). Semplifichiamolo considerando 4 regine e una scacchiera 4×4.



− Per risolverlo potrei provare a collocare sulla scacchiera le 4 regine in tutti i modi possibili e via via verificare se sono soddisfatte le condizioni richieste. Ma il procedimento sarebbe lungo: i modi in cui posso scegliere i 4 posti in cui collocarle sono molti. *Quanti* sono? Quanti sarebbero nel caso del quesito originale?
− Provate con tentativi *ragionati* a risolvere il quesito (a lato è già indicata una collocazione accettabile delle 4 regine).

e13 Lo schema a lato (noto come ***triangolo di Tartaglia*** o di *Pascal*), ottenuto disponendo sui lati sinistro e destro degli "1" e sommando man mano due a due gli elementi di una riga per ottenere gli elementi interni della riga successiva, fornisce un metodo alternativo per calcolare C(*n*,*k*) per qualunque valore di *n* e *k*:
• Il triangolo è costruito mettendo degli "1" sui lati obliqui; gli elementi su tali lati corrispondono ai valori di C(n,0) e di C(n,n). Dimostra, utilizzando la definizione del concetto di combinazione («sottoinsieme di k …»), che effettivamente C(n,0)=1 e C(n,n)=1.
• La costruzione degli elementi interni del triangolo corrisponde alla equaz. C(n+1,k+1)= C(n,k)+C(n,k+1). Dimostra tale eguaglianza usando l'espressione per calcolare le combinazioni introdotta in §3.

```
          1   1       n=1
        1   2   1       n=2
      1   3   3   1       n=3
    1   4   6   4   1       n=4
  1   5  10  10   5   1       n=5
1   6  15  20  15   6   1       n=6
k =  0   1   2   3   4   5   6
```

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
funz. esponenziale (§2), *successione* (§2), *disposizioni* (§3), *combinazioni* (§3), *matematica combinatoria* (§3).
2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.
3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: piccola CT grande CT isto isto con % boxplot striscia 100 ordina Grafici divisori Indet distanza Triang eq.polinomiale eq.nonPolin sistemaLin moltPolin sempliciEq divisori fraz/mcd opFraz SumPro dadoCart boh1 boh